Travaux Dirigés : Electrostatique

SMPC : PHY02

Département de Physique
Faculté des Sciences de Tétouan

01-03-2010

Série n° 1

Exercice 1 : On considère deux charges électriques ponctuelles *q* et *-4q*, distantes de *a*. *q étant positif*.

a. Déterminer le champ $\vec{E}$ en un point *M* tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. Dessiner les champs créés par chacune des charges et le champ résultant.

b. Déterminer la valeur de *x* négatif pour laquelle $\vec{E} = \vec{0}$. Donner la valeur du potentiel électrique *V* en ce point.

Exercice 2 : On considère une boucle de rayon *R* portant une charge électrique de densité linéique uniforme λ. Soit M un point de l'axe de la boucle d'abscisse *z*.

a. Déterminer directement :

- le champ électrique $\vec{E}(z)$
- le potentiel $V(z)$ (on prendra $V = 0$ pour z infini).

b. Retrouver l'expression du champ électrique à partir de celle du potentiel.

Exercice 3 : Effectuer le calcul du champ électrostatique $\vec{E}$ crée par un disque de rayon *R* portant la charge surfacique $\sigma = cte$, en un point de son axe $(O; \vec{k})$. Tracer *E(z)* en fonction de *z*. $\overrightarrow{OM} = z\vec{k}$. En faisant tendre *R* vers l'infini, en déduire le champ créé par un plan (infini) de charges.

Exercice 4 : On considère une demi-droite $(A; \vec{j})$ portant une densité linéique de charges uniforme λ. Déterminer le champ en M. Avec $\overrightarrow{OA} = a\vec{j}$; $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé.

Exercice 5 : Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ en tout point M de l'espace dans les cas suivants :

1. une sphère de centre *O* de rayon *R* portant une densité surfacique de charges uniforme σ.
2. une sphère de centre **O** de rayon *R* portant une densité volumique de charges uniforme ρ.
3. une distribution de charges à symétrie sphérique centrée en *O* telle qu'à une distance *r* de *O*, $\rho = \rho_0 e^{-kr}$.
4. un cylindre de longueur infinie, de rayon R, portant une densité surfacique uniforme σ.
5. un cylindre de longueur infinie, de rayon R, portant une densité volumique de charges r uniforme ρ.

Exercice 6 : On considère deux sphères conductrices, l'une notée S_1, pleine et portant une charge Q_1 négative. L'autre, S_2, creuse et ne portant aucune charge.

a. Donner la répartition des charges sur S_2, lorsqu'on place S_1 à l'intérieur de S_2.
b. Donner la nouvelle répartition des charges lorsqu'on établi un contact électrique entre les deux sphères.
c. En plus du contact électrique entre S_1 et S_2, on relie S_2 au sol. Quelle est alors, la nouvelle répartition des charges?

Exercice 7 : On considère deux sphères *S* et *S'* de rayons *R* et *R'* portant des charges respectives *Q* et *Q'* et reliées par un fil conducteur dont on néglige la charge. Les deux sphères sont supposées suffisamment éloignées pour que leurs charges restent uniformes.

a. Etablir une relation entre les champs *E* et *E'*, au voisinage de chaque sphère, et leurs rayons. Ce résultat est-il prévisible?
b. Examiner le cas particulier où *S* représente le globe terrestre (*R=6400km*).

Exercice 8 : Calculer la capacité d'un condensateur dont l'armature interne est un cylindre d'axe Δ, de rayon R_1 et dont la surface interne de l'armature externe est un cylindre de même axe Δ et de rayon R_2 (condensateur cylindrique). On calculera la capacité pour une longueur *h* du condensateur.
Calculer le cas où R_1 et R_2 sont peu différents. On supposera $R_2 = R_1 + e$, avec $e << R_1$ et R_2.

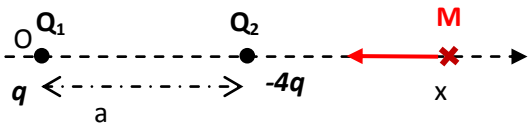
ETUSUP .com

Série n° 1 : Corrigé

Exercice 1 :

a/ Selon la position relative du point M, on distingue 3 cas :

1er cas : $a < x$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2} - \frac{4q}{(x-a)^2}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x+a)(3x-a)}{x^2(x-a)^2}\vec{i} = E(x)\vec{i}$$

Comme $x > a$, on s'aperçoit que $E(x) < 0$

2eme cas : $0 < x < a$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2} - \frac{4q}{(a-x)^2}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x+a)(a-3x)}{x^2(x-a)^2}\vec{i} = E(x)\vec{i}$$

Dans ce cas, *E(x)* peut être :

positif ($x < \frac{a}{3}$), négatif ($x > \frac{a}{3}$) ou nul ($x = \frac{a}{3}$)

3eme cas : $x < 0$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2} - \frac{4q}{(a+|x|)^2}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x+a)(a-3x)}{x^2(x-a)^2}\vec{i} = E(x)\vec{i}$$

Comme $0 > x$, on a $a - 3x > 0$

Dans ce cas, *E(x)* peut être :

positif ($x > -a$), négatif ($x < -a$) ou nul ($x = -a$)

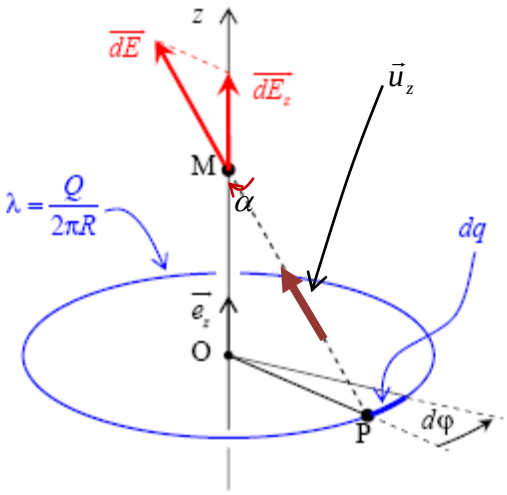
b/ $E(-a) = 0$

$$V(-a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{4q}{2a}\right) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Exercice 2 :

Calcul direct du champ :

La symétrie du problème impose que : $d\vec{E} \,//\, \vec{z}$



Le champ créé en M par une longueur infinitésimale de longueur R$d\varphi$ au point P de coordonnées polaires (R, φ) vaut : $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\varphi}{r^2}\vec{u}_z$

Avec : $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. En réalité, la seule composante utile de $d\vec{E}$ est la composante suivant $\vec{z}$, comme le champ final $\vec{E}$ est suivant $\vec{z}$.

On projette $d\vec{E}$ sur l'axe (O, z) :

$$dE = dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\varphi}{r^2}\cos\alpha$$

Le champ total est : $E(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{boucle}\frac{\cos\alpha}{r^2}d\varphi = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r^2}\int_0^{2\pi}d\varphi$

car α et r sont constants lorsque le point P décrit la boucle. Soit, $E(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r^2}$

En revenant aux données de l'exercice : $E(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$

Exercice 3 : On calcule le champ par la méthode directe pour un point M de cote z positive :

Remarque : E(z) = -E(-z) (à cause de la symétrie)

<u>Calcul direct du potentiel :</u>

On applique la définition :

On suppose que l'origine des potentiels est à l'infini.

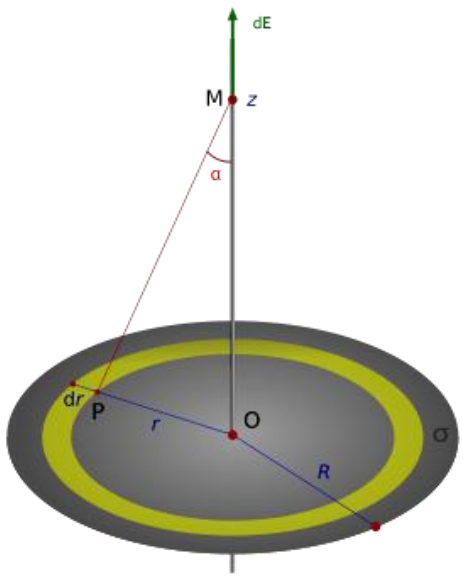
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{boucle}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{boucle}\frac{\lambda R d\varphi}{r} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi}d\varphi$$

Soit finalement : $V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$

On peut retrouver ce résultat à partir de la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Comme E ne dépend que de z, il vient : $E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z}$, soit en dérivant l'expression de E(z) :

$$E(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

ETUSUP .com



- Tout plan contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution, donc pour tout point M de (Oz), $\vec{E}(M)$est suivant $\vec{z}$
- On utilise comme surface élémentaire une **couronne élémentaire** de *rayon r*, d'*épaisseur dr*. Cette couronne est vue sous un angle α depuis le point M. On intégrera suivant α pour « balayer » toute la surface de la couronne.
- La surface de cette couronne élémentaire est $\mathrm{d}S = 2\pi r.\mathrm{d}r$. Le champ créé en M par cette couronne élémentaire est donc $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\cos(\alpha)\ \vec{u}_z = \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0 PM^2}\cos$
- Comme on veut intégrer suivant α, on va chercher à tout exprimer en fonction de α et *z* :
  - $r = z.\tan(\alpha)$donc $\mathrm{d}r = \frac{z.\mathrm{d}\alpha}{\cos^2(\alpha)}$
  - $PM = \frac{z}{\cos(\alpha)}$
- On obtient finalement $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z\tan(\alpha)\frac{z.\mathrm{d}\alpha}{\cos^2(\alpha)}\frac{\cos^2(\alpha)}{z^2}\cos(\alpha)\ \vec{u}_z$, ce qui après simplification donne $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha\ \vec{u}_z$
- On intègre pour αentre 0 et α_{max} : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_{max}}\sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha\ \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos(\alpha_{max}))\vec{u}_z$
- On revient aux données du problème : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{u}_z$
- La symétrie de la distribution par rapport au plan du disque assure $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$
- On peut considérer que le plan est un disque de rayon infini : $\lim_{R\to\infty}\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$

Exercice 5 : 1. **<u>Sphère chargée en surface avec, $\sigma = cte$</u>**

Fait lors de la séance du cours.

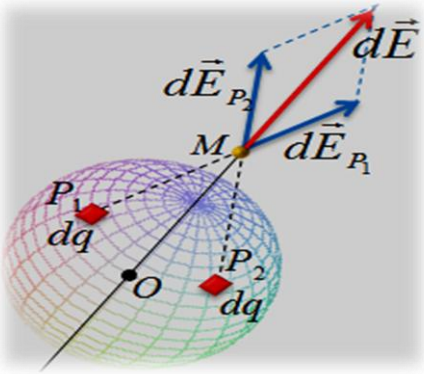
ETUSUP .com

2. **Sphère chargée en volume avec, $\rho = cte$**

Pour déterminer le champ, on suit les étapes suivantes :

-Direction de E :

La symétrie sphérique (sphère, $\rho = cte$) fait que la direction de $\vec{E}$ est parallèle au vecteur $\vec{e}_r$ ($\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$



).

$\vec{E}$ ne dépend que de r et de $\vec{e}_r$. Soit, $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. On dit que le champ est radial.

Choix de la surface de Gauss :

Comme il s'agit d'une symétrie sphérique, on choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon r.

Calcul de flux et de Q_{int}

$$\phi = \int_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{S.G} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS$$
$$\phi = \int_{S.G} E(r) dS = E(r) \int_{S.G} dS .$$

Soit: $\phi = 4\pi r^2 E(r)$

Pour calculer Q_{int}, il faut se rappeler qu'il correspond à la charge se trouvant à l'intérieur de la surface de Gauss. Alors, il y'a deux cas possibles :

r > R : A ce cas, correspond la charge entière de la distribution : $Q_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

r < R : A ce cas, correspond uniquement la portion de charge $Q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Déduction de l'expression du champ :

Le théorème de Gauss veut que : $\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$, alors on peut déduire :

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \ r \geq R \\ E(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}, \ r \leq R \end{cases}$$

3. **Distribution sphérique chargée en volume avec $\rho = \rho_0 e^{-kr}$**

Dans cette question, on suit le même raisonnement qu'en 2. , sauf que pour calculer Q_{int}, on tient compte du fait que ρ dépend de r.

r > R : $Q_{int} = \int_{distributionG} \rho(r) d\tau$

$$Q_{int} = \int_{Distribution} \rho_0 e^{-kr} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho_0 \int_0^R e^{-kr} r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

ETUSUP .com

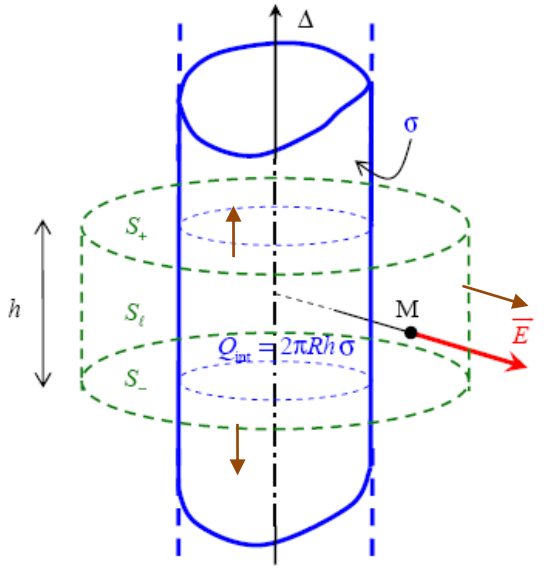
$$Q_{\text{int}} = \rho_0 \frac{4\pi}{k^3}[2-(2+2kR+k^2R^2)e^{-kR}]$$

<u>r < R :</u> $Q_{\text{int}} = \int_{volumeSG} \rho(r)d\tau$

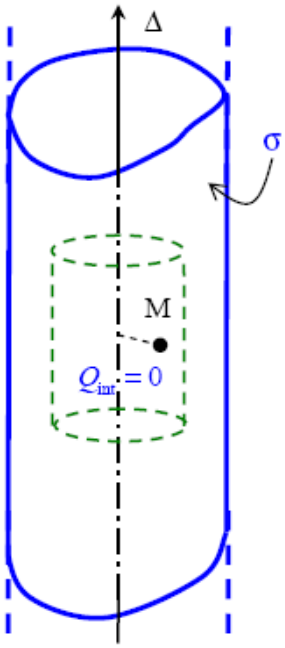
$$Q_{\text{int}} = \rho_0 \frac{4\pi}{k^3}[2-(2+2kr+k^2r^2)e^{-kr}]$$

D'où l'expression du champ :

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\rho_0[2-(2+2kR+k^2R^2)e^{-kR}]}{\varepsilon_0 k^3 r^2}, \ r \geq R \\ E(r) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^3 r^2}[2-(2+2kr+k^2r^2)e^{-kr}], \ r \leq R \end{cases}$$



4. <u>**Cylindre chargé en surface avec, $\sigma = cte$**</u>



-<u>Direction de E :</u>

La symétrie cylindrique (cylindre de longueur infinie, $\sigma = cte$) fait que la direction de $\vec{E}$ est parallèle au vecteur $\vec{e}_r$ (vecteur de la base cylindrique $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$). On dit que $\vec{E}$ est radial et ne dépend que de *r* et de $\vec{e}_r$, soit : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

<u>Choix de la surface de Gauss :</u>

Comme il s'agit d'une symétrie cylindrique, on choisit comme surface de Gauss le cylindre d'axe Δ, de rayon r (r étant la distance de M à l'axe Δ) et de hauteur h.

<u>Calcul de flux et de Q_{int}</u>

$$\phi = \int_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

$$\phi = \int_{b-} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{b} dS + \int_{b+} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{c} dS + \int_{laterale} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS$$

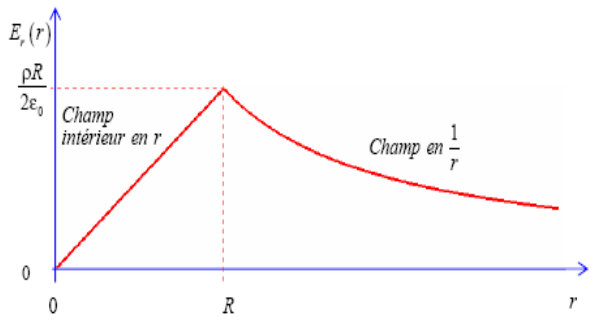
$$\phi = 0 + 0 + \int_{base} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS$$

$$\phi = \int_{laterale} E(r)dS = E(r)\int_{laterale} dS$$

$$\underline{\phi = E(r)2\pi rh}$$

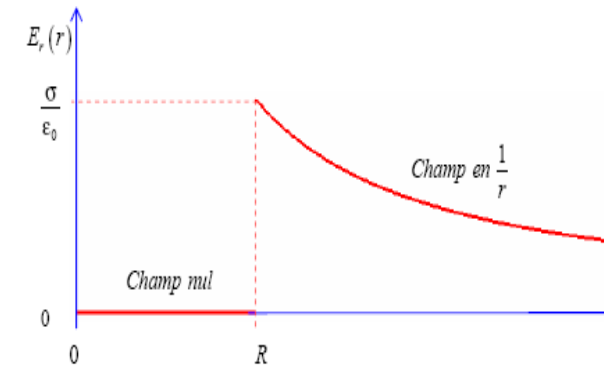
r < R : Lorsque M est à l'intérieur de la distribution : $Q_{int}=0$

r > R : Lorsque est à l'extérieur de la distribution, il correspond la charge entière de la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = 2\pi Rh\sigma$



Déduction de l'expression du champ :

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}, \ r \geq R \\ E(r) = 0, \ r \leq R \end{cases}$$



---

5. **Cylindre chargé en volume avec, $\rho = cte$**

Dans ce cas, on suit le même calcul que le cas du cylindre chargé en surface. Seulement le calcul de Q_{int} change.

r < R : $Q_{\text{int}} = \pi r^2 h\rho$

r > R : $Q_{\text{int}} = \pi R^2 h\rho$.

Soit pour le champ,

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, \ r \geq R \\ E(r) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}, \ r \leq R \end{cases}$$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..